CLASE 14. Fórmulas de Cauchy

Si f es una función analítica en un abierto que contiene al disco cerrado delimitado por la circunferencia de centro p y radio r, $\mathrm{C}(p, r)$, entonces el comportamiento de f en C determina la conducta de f en el interior del disco. Esto es lo que se describirá a continuación.

14.1 Fórmula Integral de Cauchy

En la demostración de la Fórmula Integral de Cauchy, haremos uso de la siguiente *ligera* generalización del Teorema de Cauchy (Teorema 13.8):

Teorema 14.1. *Sea C una curva cerrada simple. Suponga que f es una función analítica en un abierto que contiene a C y a la región encerrada por C, excepto en un punto interior z_0, en el que se cumple*

$$\lim_{z\to z_0} |(z-z_0)f(z)| = 0,$$

entonces $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

Prueba. Comenzamos notando que para r suficientemente pequeño, de modo que la circunferencia $\mathrm{C}_r(z_0)$ de centro z_0 y radio r quede en la región encerrada por C, podemos aplicar el Teorema de Deformación (Teorema 13.10), obteniendo

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathrm{C}_r(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

donde ambas curvas están orientadas anti-horariamente (o ambas horariamente).

Por otra parte, como $\lim\limits_{z\to z_0} |(z-z_0)f(z)| = 0$ entonces

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \text{existe } \delta > 0 \ \text{ tal que si } \ 0 < |z-z_0| < \delta \text{ entonces } |(z-z_0)f(z)| < \varepsilon \ \text{ y,}$$

en consecuencia, también $|f(z)| < \dfrac{\varepsilon}{|z-z_0|}$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el disco $|z-z_0| < \delta$ está dentro de la región encerrada por C.

Luego, para $0 < r < \delta$ se cumple

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{C_r(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{C_r(z_0)} |f(z)|\,|\,\mathrm{d}z\,| < \int_{C_r(z_0)} \frac{\varepsilon}{z - z_0}|\,\mathrm{d}z\,|$$
$$= \frac{\varepsilon}{r}\int_{C_r(z_0)} |\,\mathrm{d}z\,| = \frac{\varepsilon}{r}2\pi r = 2\pi\varepsilon.$$

Así, $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| < 2\pi\varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$, de donde concluimos

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

$\square$

Teorema 14.2 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Sea $f(z)$ una función analítica en un disco abierto $\mathcal{D}$ y sea C una curva cerrada simple, orientada positivamente, en $\mathcal{D}$. Para cualquier punto $a \notin C$, a en el interior de la región encerrada por C se tiene que*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)}\,\mathrm{d}z.$$

Prueba. Consideremos la función F definida en $\mathcal{D}$ como

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} & \text{para } z \neq a \\ f'(a) & \text{en } z = a. \end{cases}$$

Como f es analítica en todo (el abierto) $\mathcal{D}$, entonces F es derivable (y, por tanto, analítica) en todo $z \in \mathcal{D}\setminus\{a\}$. Además, F es continua en el punto a, por lo que cumple $\lim_{z\to z_0} |(z-z_0)f(z)| = 0$. Luego, por el Teorema 14.1, $\int_C F(z)\,\mathrm{d}z = 0$ y, en consecuencia, $\int_C \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\,\mathrm{d}z = 0$. Así,

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)}\,\mathrm{d}z = f(a)\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

Usando el Teorema de la Deformación y el Ejemplo 13.5 se tiene que $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi i$, por lo que, sustituyendo,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)}\,\mathrm{d}z.$$

$\square$

***Observación* 14.3.** Con sólo conocer los valores de f en C y que f es analítica en la región encerrada por C, entonces, por el teorema anterior, podemos determinar los valores $f(a)$ para cualquier a en el interior de la región.

***Observación* 14.4.** Si $a \in \mathcal{D}$, $a \notin C$ y a tampoco está en el interior de la región encerrada por C entonces es claro (Teorema 13.8) que $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 0$.

***Observación* 14.5.** Si $\mathcal{D}$ es un dominio, es decir, si $\mathcal{D}$ es un conjunto abierto y conexo, entonces podemos probar muy fácilmente que la función $F(z)$, definida en la demostración del teorema anterior (que vimos es derivable en $\mathcal{D}$ excepto posiblemente en el punto a, donde es continua) resulta analítica en todo $\mathcal{D}$, ya que la función g definida en $\mathcal{D}$ mediante $g(z) = \displaystyle\int_{[a,z]} f(w)\,\mathrm{d}w$, siendo $[a,z]$ cualquier curva poligonal (simple) contenida en $\mathcal{D}$ que vaya desde a hasta z, está bien definida, es analítica y cumple $\dfrac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z} = f(z)$. Así, la analiticidad de f resulta consecuencia del Teorema 13.7.

***Observación* 14.6.** Esta fórmula de representación integral también es válida en cualquier región donde se verifique el teorema de Green.

Si pensamos el punto a como una variable (z) y cambiamos la notación, podemos re-escribir la fórmula integral en la forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)}\,\mathrm{d}w.$$

14.2 Fórmula de Cauchy para derivadas

Consideremos una función $f(z)$ analítica en una región arbitraria abierta Ω. Para cada punto $z \in \Omega$, tomemos una circunferencia $\mathrm{C}_r(z)$ centrada en z completamente contenida en Ω (tomando r suficientemente pequeño). La fórmula de Cauchy es válida y, por lo tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)}\,\mathrm{d}w.$$

Suponiendo que en la integral anterior se puede derivar bajo el signo de integración, se obtiene que

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w$$

y, en general,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w.$$

Re-escribimos: $f^{(n)}(a) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$

De esta manera, simplemente suponiendo que se puede derivar bajo el signo integral y aplicando el principio de inducción se tiene la siguiente generalización de la fórmula integral de Cauchy

Teorema 14.7 (Fórmula Integral para derivadas)**.** *Sea C una curva cerrada simple orientada positivamente y sea $f(z)$ una función analítica en un abierto $\mathcal{D}$ que contiene a C y a la región interior delimitada por C. Si a es cualquier punto en la región interior a C, entonces*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

.

Teorema 14.8 (Desigualdades de Cauchy)**.** *Sea C la circunferencia con centro a y radio r, $\mathrm{C}_r(a)$ (con $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ arbitrarios). Sea $f(z)$ una función analítica en un conjunto abierto $\mathcal{D}$ que contiene a C y a la región interior (encerrada por C). Entonces*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

suponiendo que f es acotada en C y $|f(z)| \leq M$ en C.

Prueba. Parametrizamos la circunferencia por $z = z(t) = a + re^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando la fórmula integral para derivadas (Teorema 14.7) encontramos que

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &\leq \frac{n!}{2\pi}\int_C \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}}\,|\,\mathrm{d}z\,| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_C \frac{M}{r^{n+1}}|\,\mathrm{d}z\,| \\ &= \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}}\int_C |\,\mathrm{d}z\,| = \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}}(2\pi r) = \frac{Mn!}{r^n}. \end{aligned}$$

□

Con el siguiente teorema se muestra que las funciones complejas $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ son no acotadas, en contraste con las correspondientes funciones reales.

Teorema 14.9 (Liouville)**.** *Sea $f(z)$ una función analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$. Si f es acotada entonces f es constante.*

Prueba. Por ser f acotada en $\mathbb{C}$, existe $M > 0$ (constante real) tal que $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Para cualquier punto $z \in \mathbb{C}$, consideramos una circunferencia C de centro z y radio r, $C = \mathrm{C}_r(z)$. Como f es analítica, particularizando $n = 1$ en la desigualdad de Cauchy (Teorema 14.8), es $|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$. Tomando $r \to \infty$, como f es analítica y acotada en $\mathbb{C}$, se sigue cumpliendo la desigualdad y, en consecuencia, $f'(z) = 0$. Luego $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ y f es constante. □

Definición 14.10 (Función Entera)**.** Una función compleja analítica en todo $\mathbb{C}$ se dice función entera.

Una aplicación del teorema de Liouville es

Teorema 14.11 (Teorema Fundamental del Algebra)**.** *Si $p(z)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos, entonces la ecuación $p(z) = 0$ tiene al menos una raíz (compleja).*

Prueba. Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, $a_k \in \mathbb{C}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Si $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ entonces podemos escribir

$$p(z) = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right).$$

Para $|z|$ suficientemente grande, es decir, para $|z| > r$ con r real no-negativo $r \gg 1$, se observa que $2n\frac{|a_k|}{|a_n|} < |z|^n$, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Luego $\frac{|a_k|}{|z|^n} < \frac{|a_n|}{2n}$, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ y así

$$\left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| < \frac{|a_n|}{2n} + \frac{|a_n|}{2n} + \cdots + \frac{|a_n|}{2n} = \frac{|a_n|}{2}$$

y de (desigualdad triangular),

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right| &\geq |a_n| - \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| \\ &\geq |a_n| - \frac{|a_n|}{2} = \frac{|a_n|}{2}, \end{aligned}$$

obtenemos que

$$|p(z)| = |z|^n \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right| \geq |z|^n \frac{|a_n|}{2}$$

para $|z| > r$ suficientemente grande.

La función $g(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ es analítica en $\mathbb{C}$ ya que $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (y p es analítica en $\mathbb{C}$) y de $|g(z)| < \dfrac{2}{|a_n|\,|z^n|}$ es $\lim\limits_{|z| \to \infty} |g(z)| = 0$. Así, $g(z)$ es acotada en $|z| > r$.

Por ser g continua, ella es acotada en el disco $|z| \le r$. Luego, g es acotada en $\mathbb{C}$ y como es analítica, entonces por el Teorema de Liouville (Teorema 14.9), $g(z)$ es constante y, en consecuencia, $p(z)$ también, lo que es una contradicción. Así, $p(z) = 0$ tiene al menos una solución. $\square$

Ejemplo 14.12. Para calcular $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{\alpha z}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z$, con $\alpha \in \mathbb{C}$ (orientación anti-horaria), vemos que la función $f(z) = e^{\alpha z}$ es analítica en $\mathbb{C}$ y, por la fórmula integral de Cauchy (Teorema 14.7 con $a = 0$),

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{\alpha z}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{2\pi i}{n!}\alpha^n.$$

Ejemplo 14.13. Calcule $I = \displaystyle\int_C \frac{e^{mz}}{az^2 - (1+a^2)iz - a}\,\mathrm{d}z$, donde C es la circunferencia $|z| = 1$ orientada anti-horariamente y $-1 < a < 1$, $a \ne 0$.

Factorizando el denominador, las raices son $z_1 = ai$, $z_2 = \frac{i}{a}$, por lo que, $az^2-(1+a^2)iz-a = a(z-ai)(z-\frac{i}{a})$.

Note que $|z_2| = \frac{1}{a} > 1$, z_2 está por fuera de la región, mientras que z_1 está en la región interior a C.

Como la función $f(z) = \dfrac{e^{mz}}{z - \frac{i}{a}}$ es analítica en la región encerrada por C (el disco unitario) entonces, gracias a la fórmula de Cauchy, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a}\int_C \frac{e^{mz}}{(z-ai)(z-\frac{i}{a})}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{a}\int_C \frac{e^{mz}/(z-\frac{i}{a})}{(z-ai)}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{a}2\pi i f(ai) = \frac{1}{a}2\pi i \frac{e^{mai}}{ai - \frac{i}{a}} = \frac{2\pi e^{mai}}{a^2-1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 14.14. Sea $f(z)$ una función entera que satisface $|f(z)| \le k|z|^2$ (con $k > 0$) para todo $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que $f(z)$ es un polinomio homogeneo de segundo grado.

Demostremos que $f'''(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, consideramos la circunferencia $\mathrm{C}_R(z)$, definida por $|w - z| = R$ y parametrizada por $w(t) = z + Re^{it}$, con $0 \le t \le 2\pi$. Usando la fórmula de Cauchy para derivadas (Teorema 14.7) es $f'''(z) = \dfrac{3!}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathrm{C}_R(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^4}\,\mathrm{d}w$. Así,

$$|f'''(z)| \le \frac{6}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(w)|}{|w-z|^4}|\,\mathrm{d}w\,| \le \frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{k|w|^2}{R^4}|\,\mathrm{d}w\,|.$$

Usando la desigualdad triangular, $|w| - |z| \leq |w - z| = R$, es $|w| \leq |z| + R$ y

$$\begin{aligned}|f'''(z)| &\leq \frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(|z|+R)^2}{R^4}\,\mathrm{d}w = \frac{3}{\pi}\frac{(|z|+R)^2}{R^4}2\pi R \\ &= 6\left(\frac{|z|^2}{R^3} + \frac{2|z|}{R^2} + \frac{1}{R}\right).\end{aligned}$$

Como f es entera podemos tomar $R \to \infty$ y así $f'''(z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$. Luego, la función $g(z) = f''(z)$ satisface que $g'(z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$, por lo cual g es constante, es decir, $f''(z) = a$ (siendo a constante compleja). Escribimos $f(z) = az^2 + bz + d$.

Note que $f(0) = 0$ ya que $|f(z)| \leq k|z|^2$. Por otra parte, $f(0) = d$, así que $d = 0$.

También $f'(0) = 0$:

$$f'(0) = \lim_{z\to 0}\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z},$$

por lo que

$$0 \leq |f'(0)| = \lim_{z\to 0}\left|\frac{f(z)}{z}\right| = \lim_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|} \leq \lim_{z\to 0}\frac{k|z|^2}{|z|} = 0.$$

Por lo tanto, $|f'(0)| = 0$ y, en consecuencia, $f'(0) = 0$.

Por ser $f(z) = az^2 + bz$, es $f'(z) = 2az + b$ y, en consecuencia, $b = 0$. Así, $f(z) = az^2$ es un polinomio homogeneo de segundo grado.

***Observación* 14.15.** Como $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$, considerando la función

$$\varphi(z) = \begin{cases}\dfrac{f(z)}{z^2} & \text{si } z \neq 0\\[2mm] \dfrac{f''(0)}{2} & \text{en } z = 0,\end{cases}$$

vemos que $\varphi(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$ (ver Observación 14.5) y acotada. Aplicando el teorema de Liouville (Teorema 14.9) es $\varphi(z)$ constante. Así, $\dfrac{f(z)}{z^2} = A$ y, en consecuencia, $f(z) = Az^2$.